EPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Durée : 2 heures 30

PRÉAMBULE

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, admettant dans I un zéro et un seul et telle que la dérivée f' ne s'annule pas sur I.

On introduit la fonction F définie sur I par la relation

$$(*) \qquad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

et on suppose que l'intervalle I est stable par F, i.e., $\forall x \in I \quad F(x) \in I$

La méthode de Newton consiste alors à construire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n), & n \in \mathbb{N} \\ x_0 \text{ donné dans } I \end{cases}$$

DÉFINITION

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite finie ℓ. On suppose que, pour tout n, $x_n \neq \ell$.

On dit que la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est quadratique si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$y_n = \frac{|x_{n+1} - \ell|}{|x_n - \ell|^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

converge vers une limite finie strictement positive.

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel strictement positif.

- I -

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \alpha$

Question 1

Montrer que les hypothèses du préambule sont satisfaites sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

Question 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la méthode de Newton et associée à la fonction f.

i - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\dfrac{u_n - \sqrt{\alpha}}{u_n + \sqrt{\alpha}}$ en fonction de $\dfrac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}}$

ii - En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quel que soit $u_0 > 0$. Quelle est sa limite ?

iii - Montrer que pour $u_0 > 0$ et $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quadratique.

Question 3

Soit $u_0 > 0$.

i - Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\quad 0 \leq u_{n-1} - \sqrt{\alpha} \leq 2(u_{n-1} - u_n)$

ii - En déduire l'estimation de l'erreur à la n-ième itération

$$0 \leq u_n - \sqrt{\alpha} \leq u_{n-1} - u_n, \qquad n \geq 2$$

Quel est l'intérêt pratique de cette estimation de l'erreur ?

Question 4

On écrit α sous la forme $\alpha = 2^p\beta$ où p est un entier et β un réel tel que $1/2 \leq \beta < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite à partir de la valeur initiale $u_0 = 2^{E(p/2)}$ où $E(p/2)$ désigne la partie entière de $p/2$.

i - Montrer que $\dfrac{|u_0 - \sqrt{\alpha}|}{|u_0 + \sqrt{\alpha}|} < (\sqrt{2} - 1)^2$

(On pourra distinguer les 2 cas : p entier pair, p entier impair).

Tournez la page S. V. P.

ii - En remarquant que $(\sqrt{2}-1)^2 < \frac{1}{5}$, montrer qu'on a l'estimation de l'erreur suivante :

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant \frac{2\sqrt{a}}{8} u_0 \left(\frac{1}{5}\right)^{2^n}, \qquad n \geqslant 1$$

iii - Quel intérêt supplémentaire offre cette estimation de l'erreur par rapport à celle obtenue à la question 3 ?

Question 5 : Application numérique

Appliquer les résultats précédents au calcul de $\sqrt{5}$ en exigeant des précisions de plus en plus grandes.

Est-il réaliste d'envisager une "grande" précision lorsqu'on utilise une calculatrice manuelle ? D'où vient la difficulté ?

- II -

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - a$

et on lui associe la fonction F définie par la relation (*).

Question 6

i - Montrer que $I =]0, \frac{2}{a}[$ est le plus grand intervalle contenu dans $]0,+\infty[$ et stable par F.

ii - Montrer que les hypothèses du préambule sont satisfaites sur $]0, \frac{2}{a}[$

Question 7

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la méthode de Newton et associée à la fonction f.

i - Montrer que si la valeur initiale v_0 est choisie dans l'intervalle $]0, \frac{2}{a}[$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

ii - Quelle est sa limite ?

iii - Montrer que pour $v_0 \in]0, \frac{2}{a}[$ et $v_0 \neq \frac{1}{a}$, la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quadratique.

Question 8

Montrer comment on peut utiliser la partie II pour améliorer la précision de l'algorithme décrit à la partie I. On reprendra en particulier l'application numérique de la **question 5.**

- III -

Soit k un entier naturel strictement supérieur à 1 et soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} w_0 = a \\ w_{n+1} = F(w_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

où F est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{k}\left[(k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right]$$

Question 9

i - En étudiant les variations de la fonction F sur $]0, +\infty[$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

ii - Montrer que pour tout $n \geqslant 2$

$$0 \leqslant w_{n-1} - a^{1/k} \leqslant k(w_{n-1} - w_n)$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 2$

$$0 \leqslant w_n - a^{1/k} \leqslant (k-1)(w_{n-1} - w_n)$$

iii - Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite donnée par la méthode de Newton pour une certaine fonction f que l'on précisera.